Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato IV

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

SOLUZIONI

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti.

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^{n^{\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{3}{4}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\cdot e^{n^{\frac{3}{4}}} = +\infty.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2}\right)^{n^2\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{n^4+n}{n^4}}\right)^{n^2\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)^{n^2\ln(n)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{n^2\ln(n)}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{n^2 ln(n)}{2}\cdot\frac{n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3\cdot\frac{\ln(n)}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n)}{2n}} = 1.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \log((n+5)!) - \log(n!+5) = \circ \lim_{n\to+\infty} \log\frac{(n+5)!}{(n!+5)} =$$

$$= \log \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{(n!+5)} = +\infty.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \sin(\log(n^2))\cdot\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) : -1 \leqslant \sin(\log(n^2)) \leqslant 1, \quad \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \to_n 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin(\log(n^2))\cdot\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log_2(n))^2+\log_2(n^2)}}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log_2(n))^2+2\log_2(n)}}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\log_2(n)\sqrt{1+\frac{2}{\log_2(n)}}}}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{1+\frac{2}{\log_2(n)}}}}{n+1} \approx \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{1+\frac{2}{\log_2(n)}}}}{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{1+\frac{2}{\log_2(n)}}-1} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{\log_2(n)\cdot(\sqrt{1+\frac{2}{\log_2(n)}}+1)}} = .$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{2}{(\sqrt{1+\frac{2}{\log_2(n)}}+1)}} = 2^1 = 2.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2n}}+3^n}{\sqrt{1+16^n}+3^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln\left(\frac{e^n\sqrt{1+\frac{1}{e^{2n}}}+3^n}{4^n\sqrt{1+\frac{1}{16^n}}+3^n}\right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln\left(\frac{3^n(\frac{e^n}{3^n}\sqrt{1+\frac{1}{e^{2n}}}+1)}{4^n(\sqrt{1+\frac{1}{16^n}}+\frac{3^n}{4^n})}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \left[\ln(\frac{3}{4})^n + \ln\left(\frac{\frac{e^n}{3^n}\sqrt{1+\frac{1}{e^{2n}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{16^n}+\frac{3^n}{4^n}}} \right) \right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \ln(\frac{3}{4}) + \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\frac{e^n}{3^n}\sqrt{1+\frac{1}{e^{2n}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{16^n}+\frac{3^n}{4^n}}} \right) = \ln(3/4).$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} n\frac{\log\frac{n+1}{n} - \log(1-\sin\frac{1}{n})}{1+n\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})^n - \log(1-\frac{1}{n})^n}{1+n\sin\frac{1}{n}} = \frac{1-(-1)}{2} = 1.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\sin(\frac{1}{n})} - 1 - \frac{1}{n}\right) \approx \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^{n\frac{3(n^2+n^4)}{3(n^2+n^4)}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{3n}{n^2+n^4}} = 1.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1.$$

<u>Esercizio 2.</u> Calcolare i seguenti limiti al variare dei parametri $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta^n(-1)^n}{(n^2+1)(\sin(\frac{1}{n}))}$$

Per β strettamente minori di -1 il limite vale $+\infty$ (al numeratore ho un esponenziale con base maggiore di 1). Se $|\beta| \leqslant 1$ il limite vale 0 (al numeratore ho un esponenziale con base in modulo minore di 1). Se $\beta > 1$ il limite non esiste per il contributo di $(-1)^n$.

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \ln(\sqrt[n]{1+\alpha^n})$$

Se $|\alpha| \leqslant 1$ il limite vale 0 (α^n è infinitesima). Se $\alpha > 1$ raccolgo all'interno della radice n-sima:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha^n}+1}) = \ln\lim_{n\to+\infty} \alpha\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha^n}+1} = \ln\alpha.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} (\beta^n + n^\beta)$$

Per β strettamente positivi è evidente che il limite vale $+\infty$ per il contributo del secondo termine. Per β minori di -1 compreso il limite non esiste a causa del contributo del primo termine. Invece nel caso $-1 < \beta \leqslant 0$ entrambi i termini sono successioni infinitesime e dunque il limite vale 0.

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1-e^{-\frac{1}{n^\alpha}}}{n^{-2\alpha}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{\frac{1}{n^\alpha}}-1}{e^{\frac{1}{n^\alpha}}\cdot n^{-2\alpha}}}$$

Ora porto fuori dalla radice la quantità $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{n^\alpha}} n^{-\alpha}}$ il cui limite per $n \to +\infty$ è ovviamente 1. Riscrivo quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1}{n^{-\alpha}}} = 1 \qquad \forall\alpha.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n^2+1}{n^\beta}\right)^n$$

Diciamo che se $\beta \leqslant 2$ il limite è ovviamente $+\infty$. Se $\beta > 2$ riscriviamo il limite come:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n^3+n}{n^\beta}}.$$

Questo limite vale e se $\beta = 3$, vale $+\infty$ se $2 < \beta < 3$ e vale 1 se $\beta > 3$.

<u>Esercizio 3.</u>Si determinino, qualora esistano, Sup e Inf su $\mathbb{R}$ dei seguenti insiemi:

$$\circ \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{2n-4}{n+1} & n \quad pari \\ e^{-(n-5)^2} & n \quad dispari \end{cases}$$

Poiché il termine della successione per n dispari è sempre positivo, sceglieremo come Min il più piccolo valore del termine per n pari, che è infatti una successione monotona crescente. Dunque il Min è in -4. Inoltre poiché il termine $a_n < 1$ con n dispari, prendiamo come Sup il limite del termine per n pari. Dunque il Sup è in 2.

$$\circ \quad A = \left\{\frac{n^3-1}{4n^3} + \frac{1}{4} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

La successione $a_n = \frac{n^3-1}{4n^3}$ è monotona crescente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1/4$. Dunque avremo un Min in $1/4$ e un Sup in $1/2$.

<u>Esercizio 4.</u> Si determini il limite della seguente successione definita per ricorrenza:

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad a_0 = \alpha > 0.$$

Osserviamo che $a_n \geqslant 0$ per ogni n. Siccome $a_{n+1} \geqslant a_n$ vale sempre, abbiamo che la successione a_n cresce in maniera monotona ad un limite $l \geqslant 0$ ed inoltre $a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ vale se e solo se $a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. Nel caso l sia finito l deve soddisfare $l = l^2 + \dfrac{1}{4}$, ossia $l = \dfrac{1}{2}$. Otteniamo quindi che $a_n \to \dfrac{1}{2}$ per $n \to +\infty$ se $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$ mentre a_n diverge a $+\infty$ se $\alpha > \dfrac{1}{2}$.